

LES FRACTIONS POUR LES NULS

Niveau 1

1 Préliminaires

Définition : Les *nombre premiers* sont les entiers supérieurs > 1 qui sont divisibles seulement par eux mêmes et par 1.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, ... sont premiers tandis que $6 (= 2 \times 3)$ n'est pas premier.

Théorème : Tout nombre entier se décompose de façon unique en produit de nombre premiers.

Exemple : $140 = 2^2 \times 5 \times 7$.

Règles pratiques : Un nombre entier est divisible par 2 lorsque son dernier chiffre est divisible par 2.

Exemple 1 : 2016 est divisible par 2. On dit qu'il est pair.

Exemple 2 : 2017 n'est pas divisible par 2. On dit qu'il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemple 1 : 2016 est divisible par 3 car $2 + 1 + 6 = 9$ et 9 est divisible par 3.

Exemple 2 : 2017 n'est pas divisible par 3 car $2 + 1 + 7 = 10$ et 10 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Exemple 1 : 2016 est divisible par 4 car 16 l'est.

Exemple 2 : 2017 n'est pas divisible par 4 car 17 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 lorsqu'il se termine par 0 ou 5.

Exemple 1 : 2016 n'est pas divisible par 5.

Un nombre entier est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemple 1 : 2016 est divisible par 9 car $2 + 1 + 6 = 9$.

Pour voir si un nombre n est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à \sqrt{n} .

Par exemple 47 est premier car il n'est ni divisible par 2, ni par 3, ni par 5.

($7 \times 7 = 49 > 47$, donc $7 > \sqrt{47}$)

Il est donc inutile d'essayer de diviser 47 par les nombres premiers supérieurs ou égaux à 7)

Calculs pratiques : Pour décomposer un entier en produit de nombres premiers, on effectue en premier lieu toutes les divisions par 2, puis toutes les divisions par 3, puis par 5, 7, ...

Exemple : On décompose 420 comme suit :

$$\frac{420}{2} = 210 \quad ; \quad \frac{210}{2} = 105 \quad ; \quad \frac{105}{3} = 35 \quad ; \quad \frac{35}{5} = 7. \text{ Ainsi, } 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Exercices

Exercice 1 : Décomposer 2016 en produit de nombres premiers.

(cet exercice ainsi que l'exercice 8 sont corrigés ; pour les autres, on donne seulement les résultats)

Exercices 2 à 10 : Décomposer les entiers suivants : (on donne seulement les résultats)

756 ; 1350 ; 1485 ; 2048 ; 2310 ; 243 ; 71 ; 3125 ; 79 .

2 Simplification des fractions d'entiers

Méthode : On décompose le numérateur et le dénominateur en produit de nombres premiers.

Ensuite, on simplifie grâce à la formule $\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$ (a, b et c sont des entiers non nuls)

$$\text{Exemple : } \frac{420}{66} = \frac{2^2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{11} = \frac{70}{11}$$

Exercices

Exercice 1 : Simplifier $\frac{2016}{756}$.

Exercices 2 à 7 : Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{3}{6} ; \frac{2048}{64} ; \frac{1485}{2310} ; \frac{1350}{243} ; \frac{17}{32} ; \frac{756}{1350}$$

3 Produits et quotients de fractions

Formules : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ ($b; d \neq 0$) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$
 ($b; c; d \neq 0$)

a est aussi une fraction : $a = \frac{a}{1}$

Ainsi, $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a \times 1}{b \times c} = \frac{a}{b \times c}$

Exemples

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 2 \times 3} = \frac{5}{9}$$

$$2 \times \frac{6}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\frac{6}{5}} = \frac{2}{\frac{6}{5}} = \frac{2 \times 5}{1 \times 6} = \frac{2 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{1}} = \frac{6}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{5}$$

Exercices

Exercice 1 : Calculer $\frac{3}{5} \times \frac{15}{7}$ et $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{15}{7}}$. (on simplifiera le plus possible, bien entendu !)

Exercice 2 : Calculer $3 \times \frac{15}{7}$ et $\frac{3}{\frac{15}{7}}$ et $\frac{\frac{15}{7}}{3}$.

Exercices 3 à 10 : Simplifier ce qui suit :

$$\frac{6}{15} \times \frac{5}{7}; \frac{6}{15}; 7 \times \frac{5}{14}; \frac{2}{5}; \frac{2}{14}; 3 \times \frac{3}{4}; \frac{17}{32}; \frac{1485}{2310} \times \frac{1350}{243}.$$

4 Sommes et différences de fractions

Formules : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et de même $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Méthode : On réduit au même dénominateur.

Exemples

Exemple 1 : $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$

Exemple 2 : $2 - \frac{3}{4} = \frac{2}{1} - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$

Exercices

Exercice 1 : Calculer $\frac{3}{2} + \frac{2}{3}$

Exercice 2 : Calculer $3 + \frac{2}{3}$

Exercices 3 à 10 : Simplifier ce qui suit :

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3}; \frac{5}{4} - \frac{3}{2}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; 5 - \frac{11}{2}; \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}; 3 + \frac{5}{2} - \frac{2}{3}; \frac{3}{5} \times \left(\frac{7}{2} + \frac{7}{3}\right); \frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{2} + \frac{7}{3}}$$