DYNAMIQUE ; ENERGIE EXCLUE

1. SYSTEMES ETUDIES EN MECANIQUE

1.1. Point matériel

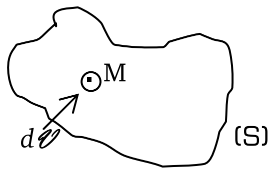
Un point matériel est un système petit à l'échelle macroscopique, grand à l'échelle microscopique.
La masse désigne la quantité de matière contenue dans un point matériel.
Unité légale = le kilogramme (kg)

Remarque : De nombreuses propriétés dynamiques d'un solide, nous le verrons, se réduisent aux propriétés du barycentre (le point G s'appelle aussi pour cette raison centre d'inertie), la mécanique du point matériel a donc des applications pratiques immédiates.

1.2. Solide

a] définition

Un solide est un système macroscopique indéformable.
La répartition de la masse est continue : elle est caractérisée par la masse volumique (notée μ ou ρ). La masse du volume élémentaire $d\mathscr{V}$ entourant le point matériel M vaut :



$dm = \mu$ (M) $.d\mathscr{V}$. La masse volumique au point M est μ (M) $= \dfrac{dm}{d\mathscr{V}}$

◊ Dans le cas d'une répartition homogène de la masse, la masse volumique est uniforme.
La masse totale du solide s'exprime alors par $\boxed{m = \mu\ \mathscr{V}}$ $\mathscr{V}$ désignant le volume du solide.

kg kg.m^{-3} m^3

◊ Dans le cas contraire, on a $m = \displaystyle\int_{(S)} dm = \int_{M\in(S)} \mu(M)d\mathscr{V}$

b] Barycentre d'un solide

Aussi appelé centre de masse, le point G est défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{M\in(S)} \overrightarrow{AM}\,dm$ $\forall$ A

Si μ est uniforme, G coïncide avec le centre géométrique du solide.

2. CINEMATIQUE DU POINT DANS UN REFERENTIEL FIXE

2.1. Référentiels et repères

◊ Référentiel = objet physique par rapport auquel on observe un mouvement .

◊ Repère = système d'axes associé à un référentiel. Pour un référentiel il existe une infinité de repères cartésiens.

2.2. Caractéristiques cinématiques d'un point M

◊ Position $\overrightarrow{OM}$, O étant lié au référentiel (origine du repère, en principe).

◊ Vitesse $\boxed{\vec{v}(M) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\overrightarrow{OM}}}$ La vitesse s'exprime en m.s^{-1}.

↳(notation de Newton)

◊ Accélération $\boxed{\vec{a}(M) = \dfrac{d\vec{v}(M)}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{\overrightarrow{OM}}}$ (m.s^{-2})

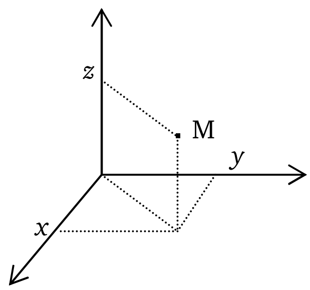
2.3. Projections dans différents repères

a) Coordonnées cartésiennes

Base ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) ou ($\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$)

position $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

vitesse $\vec{v}\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases}$ accélération $\vec{a}\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases}$

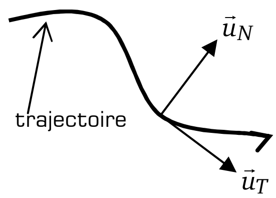


b) Coordonnées de Frénet

Base ($\vec{u}_T,\vec{u}_N,\vec{u}_B$)

$\vec{u}_T$ = vecteur unitaire tangentiel. Tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement .

$\vec{u}_N$ = vecteur unitaire normal. Au voisinage de M, on peut définir le plan de la trajectoire, appelé plan osculateur. $\vec{u}_N$ est le vecteur unitaire de ce plan, perpendiculaire à $\vec{u}_T$ et orienté vers la concavité de la trajectoire.



$\vec{u}_B$ = vecteur unitaire binormal. Forme avec $\vec{u}_T,\vec{u}_N$ un trièdre orthonormé direct : $\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$.

On a $\boxed{\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}_T}$ et $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{\rho}\vec{u}_N}$ avec ρ = rayon de courbure

On pose $\vec{a}_T = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{u}_T$ accélération tangentielle

$\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$ accélération normale

2.4. Mouvements particuliers

◊ Mouvement uniforme

$\|\vec{v}\|$ = constante attention $\vec{a} \neq \vec{0}$; $\vec{a} = \vec{a}_N$

◊ Mouvement rectiligne

$\vec{v}$ garde une direction fixe ; trajectoire = droite ; $\vec{a} = \vec{a}_T$

◊ Mouvement rectiligne uniforme

$\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ $\vec{a} = \vec{0}$

Si O$_x$ est l'axe de la trajectoire, on peut poser $\vec{v} = v_o\vec{i}$ avec v_0 = constante.

On obtient alors l'équation horaire du mouvement :

$x(t) = \int v_o dt = v_0 t + x_0$ avec x_o = position initiale.

◊ Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$\vec{a} =$ constante

Si O_x est l'axe de la trajectoire, on peut poser $\vec{a} = a_o\vec{i}$ avec $a_o =$ constante

d'où $v = \int a_o dt = a_0 t + v_0$, si v_0 est la vitesse initiale.

Equation horaire : $x(t) = \int v.dt = ½\, a_0 t^2 + v_0 t + x_0$, $avec\ x_0$ = position initiale.

◊ Mouvement circulaire uniforme

ρ = constante = R, rayon du cercle. Si O est le centre du cercle, $R = \mathrm{OM}$.

Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est défini par $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et la vitesse angulaire par $\omega = \|\vec{\omega}\|$

$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \omega R$. D'où $\vec{v} = \omega R\vec{u}_T$ et $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N = \omega^2 R\vec{u}_N$.

3. Actions subies par un systeme

3.1. Classification

◊ Selon type d'action :

On distingue les actions à distance et les actions de contact.

◊ Selon source de l'action :

Action extérieure : exercée par un élément extérieur au système.
Action intérieure : exercée par une partie du système sur une autre partie du système. Il n'y a pas d'action intérieure à un point matériel.

3.2. Les forces

a) définition
Une force est une grandeur vectorielle traduisant l'action exercée par un système sur un point matériel. Son intensité se mesure en newtons.
Une force est capable de produire ou modifier un mouvement, ou encore de créer une déformation.

b) exemple de force à distance
Nous ne rencontrerons que le poids

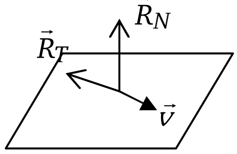
$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$ $\vec{g}$: champ de pesanteur

$g = \|\vec{g}\|$: intensité de la pesanteur ($g \approx 9{,}81$ m.s^{-2} ou N.kg^{-1})

c) exemples de forces de contact

◊ particule liée à une surface

réaction de la surface : $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$

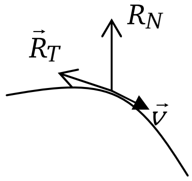


$\vec{R}_T$ (réaction tangentielle) $\in$ plan tangent à la surface ; R_T = force de frottement solide, opposée au mouvement.

$\vec{R}_N$ (réaction normale) $\perp$ plan tangent.

◊ particule liée à une courbe

réaction de la courbe: $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$



$\vec{R}_T$ (réaction tangentielle) tangent à la courbe, s'oppose au mouvement, caractérise les frottements solides.

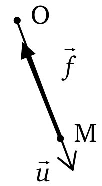
$\vec{R}_N$ (réaction normale) $\in$ plan normal à la courbe.

◊ En l'absence de frottement solide, $\vec{R} = \vec{R}_N$

◊ frottements fluides (exercés par un liquide ou un gaz)

Souvent notée $\vec{f}_F$, la force de frottement fluide peut être modélisée de différentes manières (se conformer à l'énoncé). La forme $\vec{f}_F = -\lambda\vec{v}$ est la plus utilisée, λ étant une constante positive.

◊ force exercée par un fil inélastique.



$\vec{f} = -T.\vec{u}$

$\vec{u}$ = vecteur unitaire (voir figure ci-contre)
T = tension du fil

d] moment d'une force

◊ par rapport à un point A

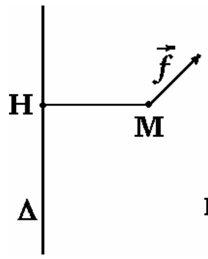
$\boxed{\vec{\mathrm{M}}(\vec{f}, A) = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{f}}$ ($\vec{f}$ est appliquée en M)

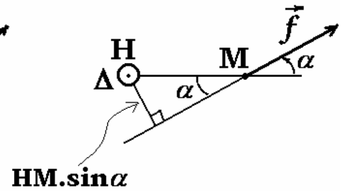
◊ par rapport à un axe Δ (voir figures)

$\vec{\mathrm{M}}(\vec{f}, \Delta) = \overrightarrow{\mathrm{HM}} \wedge \vec{f}$

avec H = projection orthogonale de M sur Δ.

$\mathrm{M}(\vec{f}, \Delta) = \left\|\vec{\mathrm{M}}(\vec{f}, \Delta)\right\| = f.\underbrace{\mathrm{HM}.\sin\alpha}_{\text{bras de levier}}$





3.3. Description d'une action

a] Système de forces

Dans le cas où le système étudié est un point matériel, une action se résume à une force unique. Dans le cas contraire, une action est caractérisée par un système de forces défini par : $\begin{cases} \vec{F} & \text{force résultante} \\ \vec{\mathrm{M}}_F(\mathrm{A}) & \text{moment résultant en A} \end{cases}$

Remarque : sur le plan mathématique, il s'agit d'un torseur, dont la propriété fondamentale est appelée relation de transport : $\vec{\mathrm{M}}_F(\mathrm{B}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} + \vec{\mathrm{M}}_F(\mathrm{A})$

On appelle centre de force C d'une action le point où semble s'exercer cette action. En particulier, $\vec{\mathrm{M}}_F(\mathrm{C}) = \vec{0}$.

b] exemple : poids d'un système

Le poids résultant est la somme des poids de chaque point matériel constituant le système. Le moment résultant du poids en un point A est la somme des moments en A des poids de chaque point matériel constituant le système.

Le centre de force du poids s'appelle centre de gravité ; il coïncide avec le barycentre G du système.

c] Notion de couple

Si la force résultante est nulle, le moment résultant est alors indépendant du point de calcul (cf. relation de transport), et se note $\vec{\mathrm{M}}_C$ ou $\vec{\Gamma}$. On dit que le système est soumis à l'action d'un couple de moment $\vec{\mathrm{M}}_C$.

3.4. Système isolé ; pseudo-isolé ; en équilibre.

◊ isolé : n'est soumis à aucune action.

◊ pseudo-isolé : la somme des forces résultantes est nulle, la somme des moments résultants est nulle (les actions se compensent).

◊ en équilibre : le système est immobile. $\forall$ M $\in$ système, $\vec{v}(M) = \vec{0}$.

Attention! En équilibre ⇒ (pseudo) isolé. L'inverse est faux.

4. LOIS DE LA DYNAMIQUE DANS UN REFERENTIEL GALILEEN

4.1. Référentiels galiléens : le minimum

Nous admettons comme principe l'existence de référentiels dits galiléens dans lesquels la physique est la même que dans un référentiel fixe.
Dans tous les cas que nous rencontrerons, la Terre pourra être considérée comme un référentiel galiléen.
Enfin, un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

4.2. Dynamique du point : les 3 lois de Newton

a] 1e loi de Newton : principe d'inertie.
Un point isolé dans un référentiel galiléen a un mouvement rectiligne uniforme (immobilité = cas particulier)

$$\boxed{\text{M point (pseudo)isolé} \Leftrightarrow \vec{v}(M) = \overrightarrow{cste}}$$

b] 2e loi de Newton : relation fondamentale de la dynamique du point
Le lien entre les forces subies par un point et la modification de son mouvement s'exprime par : $\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{f}}$

m étant la masse du point matériel, $\vec{a}$ son accélération, et $\sum \vec{f}$ la somme vectorielle des forces qu'il subit.
Remarque : si le référentiel d'étude n'était pas galiléen, il faudrait ajouter aux forces les forces d'inertie.

c] 3e loi de Newton : loi des actions mutuelles
Soient 2 points A et B en interaction (A agit sur B, B agit sur A). On a alors :

$$\boxed{\vec{f}_{A \to B} = -\vec{f}_{B \to A}}$$

4.3. Dynamique du solide

a] Actions intérieures

$$\sum \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{\mathrm{M}}_{\text{int}}(\mathrm{O}) = \vec{0} \qquad \text{O point fixe}$$

b] Théorème du centre d'inertie ou de la variation de la résultante cinétique

$$\boxed{m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{ext}}$$

Remarque : la résultante cinétique s'exprime par $\vec{p} = m\vec{v}(\mathrm{G})$, d'où l'appellation théorème de la variation de la résultante cinétique.

c] Théorème de la variation du moment cinétique
Nous nous intéressons au cas d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ caractérisé par le vecteur rotation $\vec{\omega}$. On a alors, avec O ∈ Δ

$$\boxed{J_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{\mathrm{M}}_{ext}(\mathrm{O})}$$

J_Δ : moment d'inertie du solide par rapport à Δ.
exemple : cylindre de révolution de masse m et de rayon R. Si Δ = axe du cylindre, $J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$

Remarque 1 : ce théorème n'est valable sous cette forme que dans les cas (fréquents) où Δ est un axe de symétrie du solide, ou si le solide est mobile dans un plan perpendiculaire à Δ.

Remarque 2 : le moment cinétique en O s'exprime dans ces cas par $\vec{L}(\mathrm{O}) = J_{\Delta}\vec{\omega},$ d'où l'appellation théorème de la variation du moment cinétique.

4.4. Méthode de résolution des problèmes de dynamique

On connaît les forces et on cherche la loi du mouvement :

① définition du système.

② choix du référentiel (préciser s'il est considéré comme galiléen ou non).

③ bilan des forces.

④ expression de la loi employée.

⑤ application de la loi.
⇒ équation différentielle du mouvement : système de 3 équations différentielles du second ordre d'inconnues $x, y; z$.

⑥ résolution.

⇒ équation horaire du mouvement : $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$ (équation paramétrique de la trajectoire)

⇒ équation de la trajectoire : $f\,(x, y, z) = 0$ (équation cartésienne)