

1. FORME LOCALE, DANS LE CAS GÉNÉRAL

James Clerck Maxwell (1831-1879) écrivit ses célèbres équations en 1864. Elles ont été réécrites plus tard sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{D} = \rho & (1) \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (3) \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (4) \end{array} \right. \quad \text{avec : } \begin{array}{l} \vec{E} \text{ champ électrique} \\ \vec{B} \text{ champ magnétique} \\ \vec{D} \text{ excitation électrique} \\ \vec{H} \text{ excitation magnétique} \\ \rho \text{ densité de charge} \\ \vec{j} \text{ densité de courant} \end{array}$$

On a les relations : $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ avec ϵ : permittivité diélectrique ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$)
 $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ μ : perméabilité magnétique ($\mu = \mu_r \mu_0$)

$\Rightarrow \vec{E}$ et \vec{B} sont couplés par les équations (2) et (4).

2. DANS LE VIDE

2.1. Forme locale :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (1) \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (3) \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{array} \right. \quad \text{On a remplacé } \vec{D} \text{ par } \epsilon_0 \vec{E} \text{ et } \vec{H} \text{ par } \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

2.2. Forme intégrale et signification physique

a) calculs

On intègre les équations (1) et (3) sur un volume \mathcal{V} limité par une surface fermée S :

$$(1) : \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \cdot d^3\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot d^3\mathcal{V}, \text{ soit, en utilisant le théorème d'Ostrogradski : } \oiint_S \vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d^3\mathcal{V}$$

$$(3) : \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{B} \cdot d^3\mathcal{V} = 0, \text{ soit, en utilisant le théorème d'Ostrogradski : } \oiint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0$$

On intègre les équations (2) et (4) sur une surface S bordée par un contour fermé C :

$$(2) : \iint_S \operatorname{rot}(\vec{E}) \cdot d^2\vec{S} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S}, \text{ soit, en utilisant le théorème de Stokes : } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S}$$

$$(4) : \iint_S \operatorname{rot}(\vec{B}) \cdot d^2\vec{S} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d^2\vec{S}, \text{ soit, en utilisant le théorème de Stokes : } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d^2\vec{S}$$

On peut alors introduire les courants dits de déplacement, dont la densité s'exprime par $\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, ce qui conduit à

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d^2\vec{S}$$

b) résultatsÉquations de Maxwell dans le vide
(forme intégrale) :

Signification physique :

$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d^3\mathcal{V} \quad (1)$	théorème de Gauss dans le vide : $\Phi(\vec{E}, S_{\text{fermée}}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}(S)$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2)$	$\mathcal{E}(\vec{E}, C_{\text{fermé}}) = -\frac{\partial \Phi(\vec{B}, S(C))}{\partial t}$; lié à la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi(\vec{B}, S(C))}{dt}$
$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$	\vec{B} à flux conservatif : $\Phi(\vec{B}, S_{\text{fermée}}) = 0$
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S} \quad (4)$	théorème d'Ampère généralisé, dans le vide : $\mathcal{E}(\vec{B}, C_{\text{fermé}}) = \mu_0 (I + I_D)_{\text{int}}(C)$

c) remarques(1) : Le théorème de Gauss s'écrit aussi sous la forme équivalente : $\Phi(\vec{D}, S_{\text{fermée}}) = Q_{\text{int}}(S)$ (4) : Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit aussi sous la forme équivalente : $\mathcal{E}(\vec{H}, C_{\text{fermé}}) = (I + I_D)_{\text{int}}(C)$

Ces deux expressions sont également valables dans un matériau.

Dans le théorème d'Ampère, la circulation de \vec{B} (ou de \vec{H}), s'écrit généralement $\oint_{M \in C} \vec{B} \cdot d\vec{OM}$ plutôt que $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$, pourprendre en compte que C n'est qu'un contour mathématique et non un circuit électrique physique, comme c'est le cas dans de la loi de Faraday.(3) : cette propriété conduit à la définition du potentiel vecteur \vec{A} à partir de \vec{B} : $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$.(2) : donne dans l'A.R.Q.S. la relation : $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.**3. DANS LE VIDE, EN L'ABSENCE DE CHARGES ET DE COURANTS**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \vec{E} = 0 & (1) \\ \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \text{div } \vec{B} = 0 & (3) \\ \text{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \rho = 0, \quad \vec{j} = \vec{0} \\ c \text{ désignant la vitesse de la lumière dans le vide, } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \end{array}$$

4. RÉGIMES STATIONNAIRESEn régime stationnaire, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}$ et \vec{B} sont découplés.**4.1. Équations locales de l'électrostatique dans le vide**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Traduit le lien du champ avec ses sources et conduit au théorème de Gauss (cf. 2.2.b).} \\ \text{Exprime une propriété du champ : un champ électrostatique ne peut pas faire circuler de courant } \Rightarrow \text{ définition du potentiel électrostatique à partir de } \vec{E}. \end{array}$$

La combinaison de ces deux équations conduit dans le vide à l'équation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ ($\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$: laplacien scalaire), cette équation conduisant elle-même à la définition générale de V .**4.2. Équations locales de la magnétostatique dans le vide**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right. \quad (3) \quad \begin{array}{l} \text{Exprime une propriété du champ : un champ magnétique est à flux conservatif (cf. 2.2.b).} \\ \text{Traduit le lien du champ avec ses sources et conduit au théorème d'Ampère sous sa forme classique.} \end{array}$$